

Leçon 10.1

Oscillateur Généralisé

Forcé

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

- Forcé Conservatif
- Forcé Dissipatif
- Analyse Modale Expérimentale
↳ lien TP-C - DAG

Chapitre 14

Généralisé nDDI Conservatif

Régime Forcé

Généralisé Conservatif – Régime Forcé

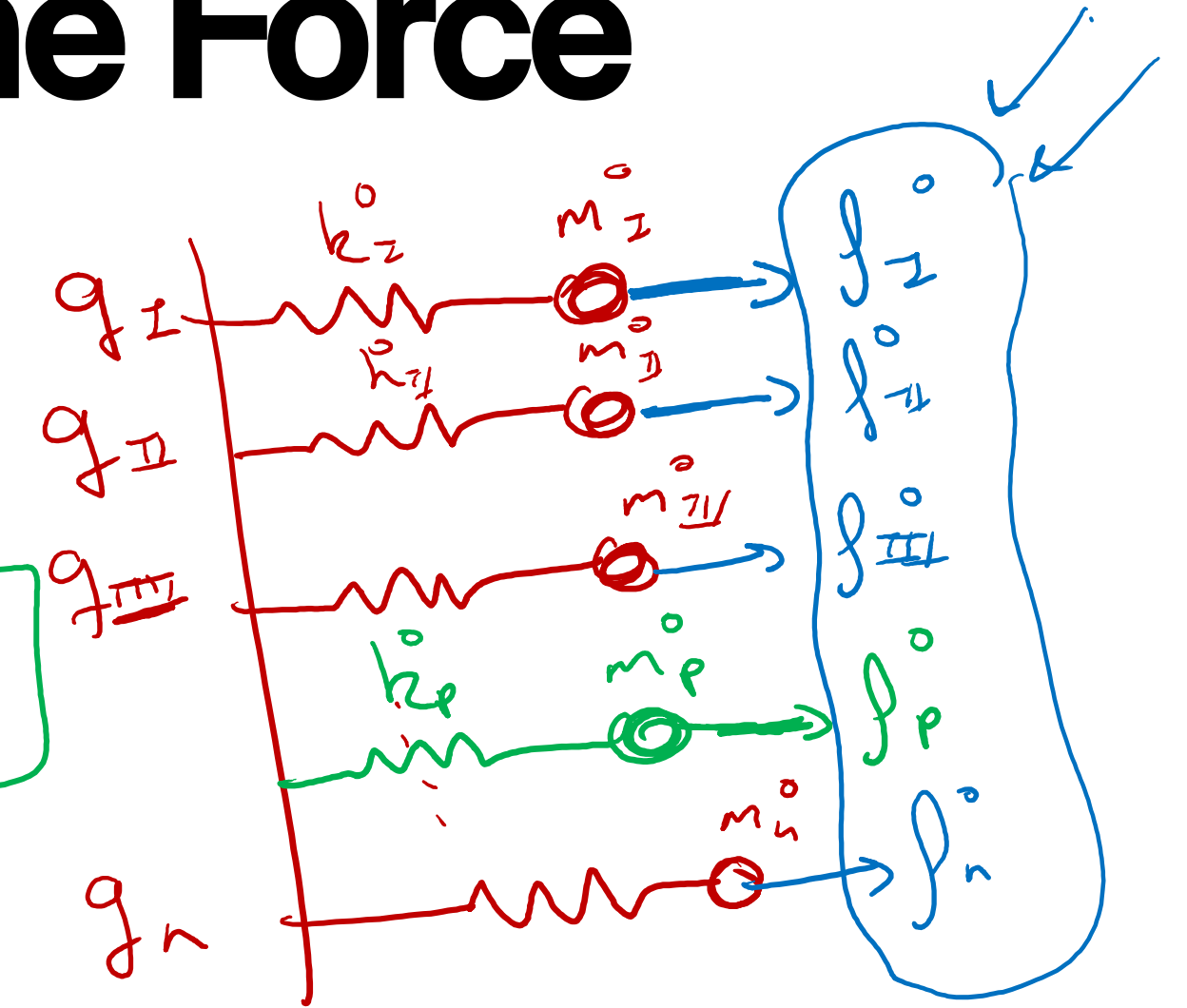
Formulation du *régime forcé* de l'oscillateur généralisé conservatif d'ordre n

$$[M]\ddot{x}(t) + [K]x(t) = f(t)$$

$f(t)$ vecteur d'ordre n des forces externes

$$m_p^o \ddot{q}_p + k_p^o q_p = f_p^o$$

mode $p = 1, \dots, n$



Découplage du régime forcé par décomposition du vecteur déplacement x dans la *base modale*

$$[M][B]\ddot{q} + [K][B]q = f$$

q vecteur des coordonnées modales

$$x = [B] \cdot q$$

Prémultiplication par la matrice $[B]^T$

$$[B]^T [M][B]\ddot{q} + [B]^T [K][B]q = [B]^T f$$

$$[M^o]\ddot{q} + [K^o]q = [B]^T f = f^o$$

$[M^o]$ matrice diagonale des masses modales
 $[K^o]$ matrice diagonale des rigidités modales
 f^o vecteur des forces modales

EPFL Généralisé Conservatif – Régime Forcé

Reformulation du régime forcé de l'oscillateur généralisé conservatif

$$\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{M}^o]^{-1} [\mathbf{K}^o] \mathbf{q} = [\mathbf{M}^o]^{-1} \mathbf{f}^o$$

$$\ddot{\mathbf{q}} + [\Delta] \mathbf{q} = [\mathbf{M}^o]^{-1} \mathbf{f}^o$$

$[\Delta] = [\Omega_0^2]$ matrice diagonale des carrés des pulsations propres

Découplage du régime forcé en n équations indépendantes

$$\ddot{q}_p + \omega_{0p}^2 q_p = \frac{1}{m_p^o} f_p^o(t) \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

$$s^2 Q_p(s) - s q_p(0) - \dot{q}_p(0)$$

$$Q_p(s^2 + \omega_0^2) - s q_p(0) - \dot{q}_p(0) = \frac{F_p^o(s)}{m_p^o}$$

$$Q_p(s) = \frac{F_p^o(s)}{m_p^o (s^2 + \omega_0^2)} + \frac{\dot{q}_p(0) + s q_p(0)}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$q_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F_p^o(s)}{m_p^o (s^2 + \omega_0^2)} + \frac{\dot{q}_p(0) + s q_p(0)}{s^2 + \omega_0^2} \right\}$$

Résolution des n équations par la méthode de Laplace ou l'intégrale de convolution (conditions initiales supposées nulles)

$$q_p = \frac{1}{m_p^o \omega_{0p}} \int_0^t f_p^o(t-u) \sin \omega_{0p} u du$$

$(p = 1, 2, \dots, n)$

EPFL Généralisé Conservatif – Régime Forcé

Retour aux coordonnées spatiales $\vec{x} = [B]q$ pour la solution du régime forcé (conditions initiales supposées nulles)

$$\begin{cases} q_p(0) = \frac{1}{m_p} \cdot \vec{\beta}_p^T \cdot [M] \cdot \vec{X}_0 \\ \dot{q}_p(0) = \frac{1}{m_p} \cdot \vec{\beta}_p^T [M] \cdot \vec{V}_0 \end{cases}$$

$$\vec{x} = \sum_p^n \vec{\beta}_p \left(\frac{1}{m_p \omega_p} \int_0^t f_p^o(t-u) \sin \omega_{0p} u du \right)$$

Solution générale du régime forcé avec conditions initiales non nulles

Libre et conservatif

$$x = \sum_p^n \frac{1}{m_p} \beta_p \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \int_0^t f_p^o(t-u) \sin \omega_{0p} u du + \beta_p^T [M] X_0 \cos \omega_{0p} t + \frac{1}{\omega_{0p}} \beta_p^T [M] V_0 \sin \omega_{0p} t \right) \quad (14.10)$$

avec

$$f_p^o = B_p^T f = \beta_p^T f \quad (14.7)$$

Chapitre 14

Généralisé n DDL Dissipatif (Caughey)

Régime Forcé

EPFL Généralisé Dissipatif – Régime Forcé

Dans la base modale:

$$\ddot{\vec{q}} + [M^0]^{-1}[C^0]\dot{\vec{q}} + [M^0]^{-1}[K^0]\vec{q} = [M^0]^{-1}\vec{F}^0(t)$$

$$\ddot{\vec{q}} + [2\Lambda]\dot{\vec{q}} + [\Delta]\vec{q} = [M^0]^{-1}\vec{F}^0(t)$$

$$[M^0] = [B]^T[M][B]; \quad [K^0] = [B]^T[K][B]; \quad [C^0] = [B]^T[C][B]$$

$$\vec{x} = [B]\vec{q} \leftrightarrow \vec{q} = [B]^{-1}\vec{x}$$

$$\vec{F}^0 = [B]^T\vec{F}$$

Caughey.

$[2\Lambda]$ { Diagonales

$[\Delta]$

$[M^0], [K^0], [C^0]$
Diagonales

EPFL Généralisé Dissipatif – Régime Forcé

Système découplé: équation du mode de rang p (sous-amorti)

$$\ddot{q}_p + 2\lambda_p \dot{q}_p + \omega_{0p}^2 q_p = \frac{1}{m_p^0} \vec{\beta}_p^T \vec{F}(t) = \frac{1}{m_p^0} f_p^0(t)$$

$$\lambda_p = \frac{c_p^0}{2m_p^0}, \eta_p = \frac{\lambda_p}{\omega_{0p}}, \omega_p = \omega_{0p} \sqrt{1 - \eta_p^2}$$

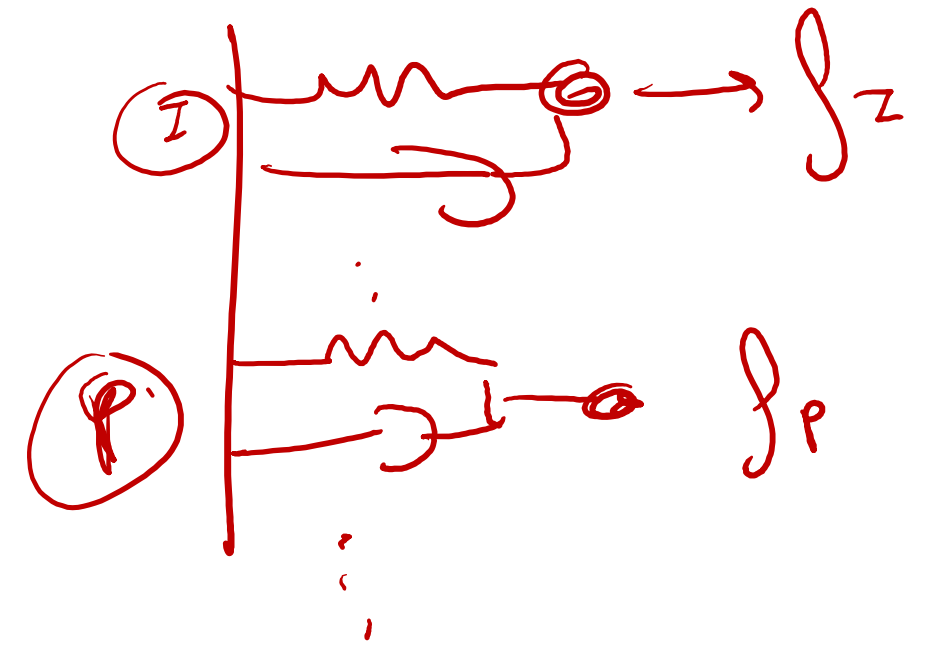
Permanente

$$q_p(t) = \left[\frac{1}{m_p^0 \omega_p} \int_0^t f_p^0(t-u) e^{-\lambda_p u} \sin(\omega_p u) du + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\lambda_p t}}{m_p^0} \left(\vec{\beta}_p^T [M] \vec{X}_0 \cos(\omega_p t) + \frac{1}{\omega_p} \vec{\beta}_p^T [M] (\vec{V}_0 + \lambda_p \vec{X}_0) \sin(\omega_p t) \right) \right]$$

Cond. Initiales

$\Rightarrow \vec{x}(t) = \sum \vec{\beta}_p \cdot q_p(t)$

EPFL Régime Forcé Permanent (Harmonique)



$$\ddot{q}_p + 2\lambda_p \dot{q}_p + \omega_{0p}^2 q_p = \frac{1}{m_p^0} \vec{\beta}_p^T \vec{F}(t) = \frac{1}{m_p^0} f_p^0(t)$$

Passage dans le domaine de Fourier (ou Laplace) (Cond. initiales nulles)
 $q_p(t) \rightarrow Q_p(j\omega), f_p^0 \rightarrow F_p^0(j\omega)$

$$\underline{Q_p(j\omega)} = \underline{Y_{pp}^0(j\omega)} \underline{F_p^0(j\omega)}$$

avec:

$$\underline{Y_{pp}^0(j\omega)} = \frac{1}{m_p^0(-\omega^2 + 2\lambda_p j\omega + \omega_{0p}^2)} = \frac{1}{m_p^0(\omega_{0p}^2 + 2j\eta_p \omega_{0p} \omega - \omega^2)}$$

$$Q_p(j\omega) = Y_p(j\omega) F_p^0(j\omega)$$

$$\vec{F}^0 = [\mathbf{B}]^T \cdot \vec{F}$$

$$F_p^0 = \vec{\beta}_p^T \cdot \vec{F}$$

avec:

$$Y_{pp}^0(j\omega) = \frac{1}{m_p^0(-\omega^2 + 2\lambda_p j\omega + \omega_{0p}^2)} = \frac{1}{m_p^0(\omega_{0p}^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega - \omega^2)}$$

$$\langle \beta_p | \beta_p \rangle \rightarrow \text{scalaire}$$

Retour en base physique: combinaison linéaire des solutions modales

$$\begin{aligned} \vec{X}(j\omega) &= \sum_{p=1}^n \vec{\beta}_p Q_p(j\omega) = \sum_{p=1}^n \vec{\beta}_p \frac{F_p^0(j\omega)}{m_p^0(-\omega^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega + \omega_{0p}^2)} \\ &= \sum_{p=1}^n \vec{\beta}_p \frac{\vec{\beta}_p^T \vec{F}(j\omega)}{m_p^0(-\omega^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega + \omega_{0p}^2)} = \left[\sum_{p=1}^n \frac{\vec{\beta}_p \vec{\beta}_p^T}{m_p^0(-\omega^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega + \omega_{0p}^2)} \right] \vec{F}(j\omega) \\ &= [Y](j\omega) \vec{F}(j\omega) \end{aligned}$$

$$\vec{\beta}_p \otimes \vec{\beta}_p^T$$

$$|\beta_p\rangle \langle \beta_p|$$

$$\vec{X}(\omega) = [Y](\omega) \cdot \vec{F}(\omega)$$

EPFL Fonction de transfert

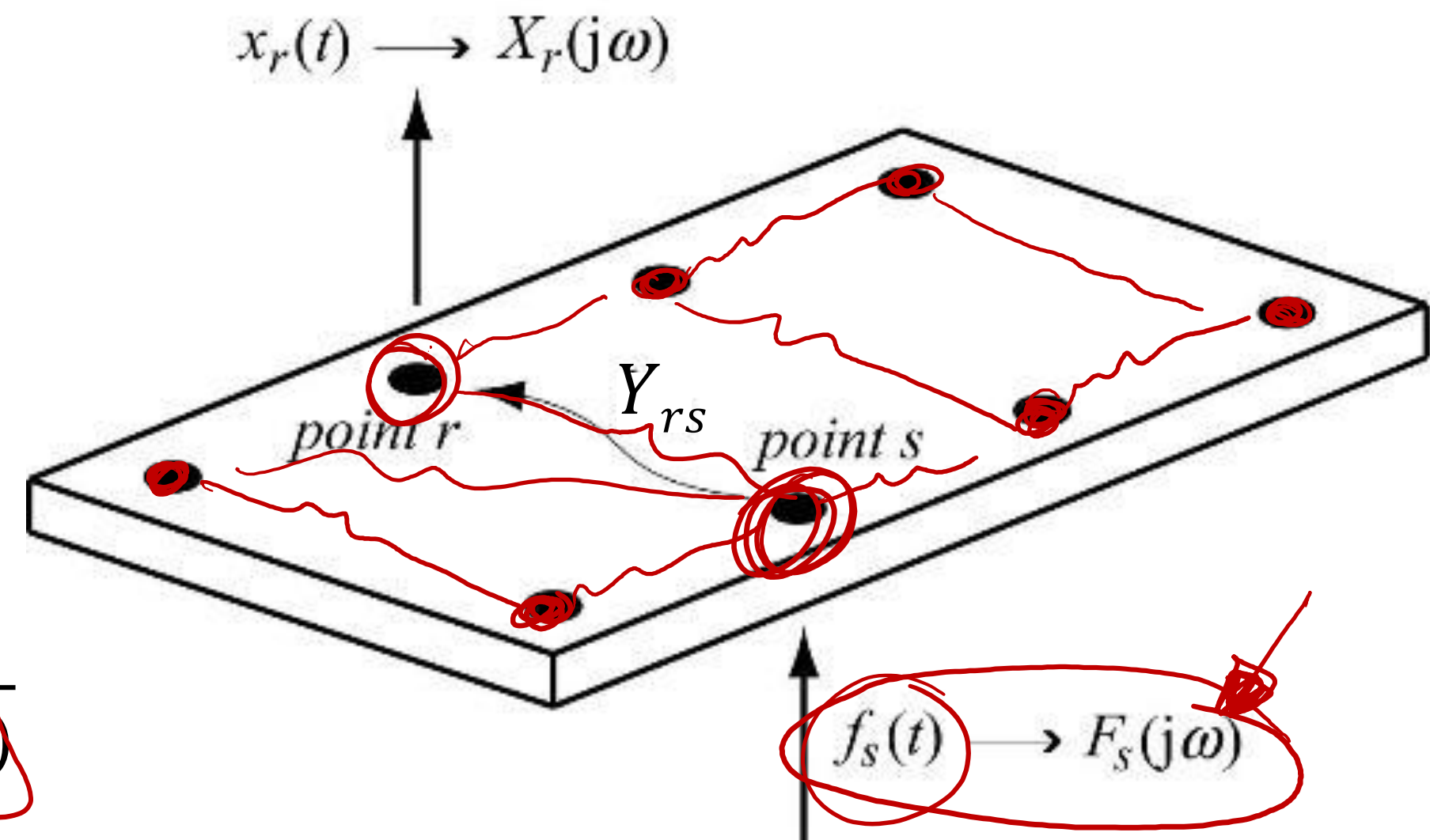
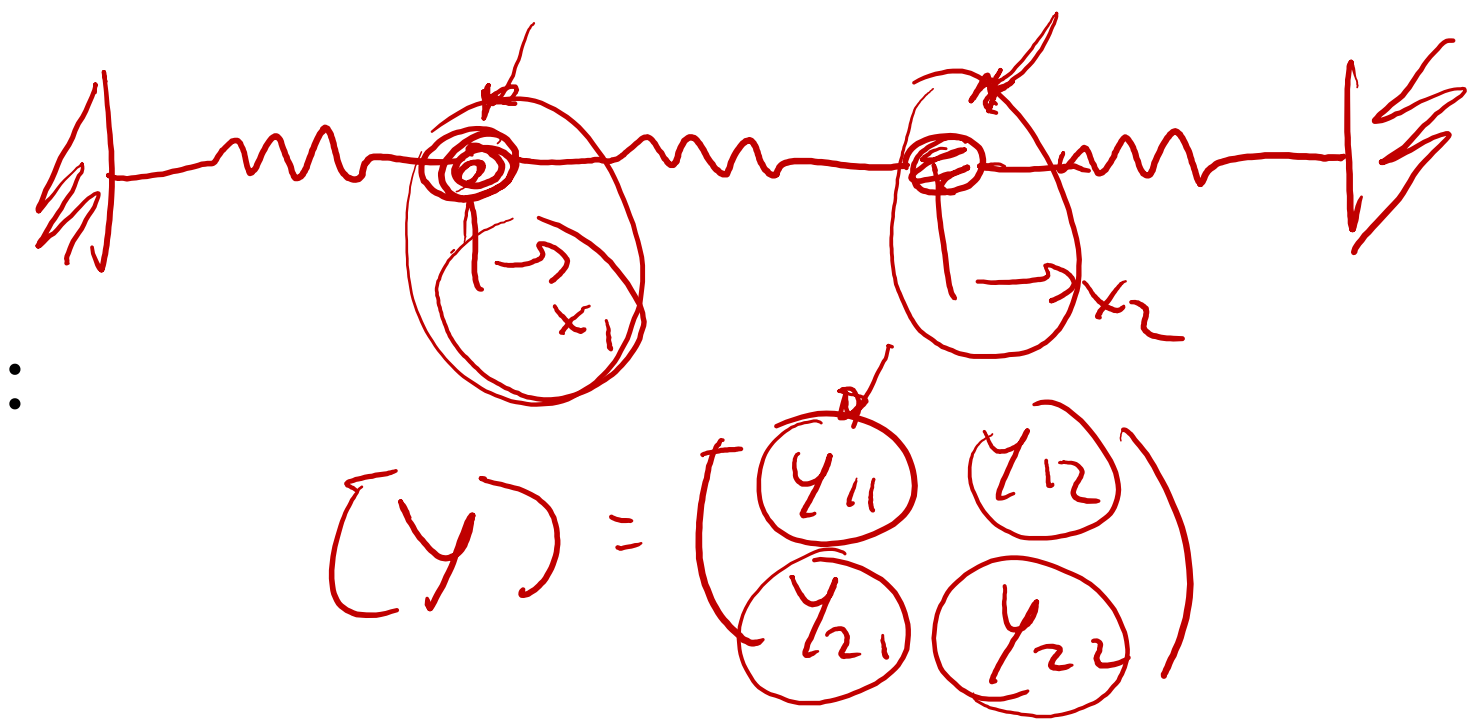
Admittance / Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) ou de transfert :

$$[Y](j\omega) = \frac{\vec{X}(j\omega)}{\vec{F}(j\omega)} = \sum_{p=1}^n \frac{\vec{\beta}_p^T \otimes \vec{\beta}_p}{m_p^0 (-\omega^2 + 2j\eta_p \omega_{0p} \omega + \omega_{0p}^2)}$$

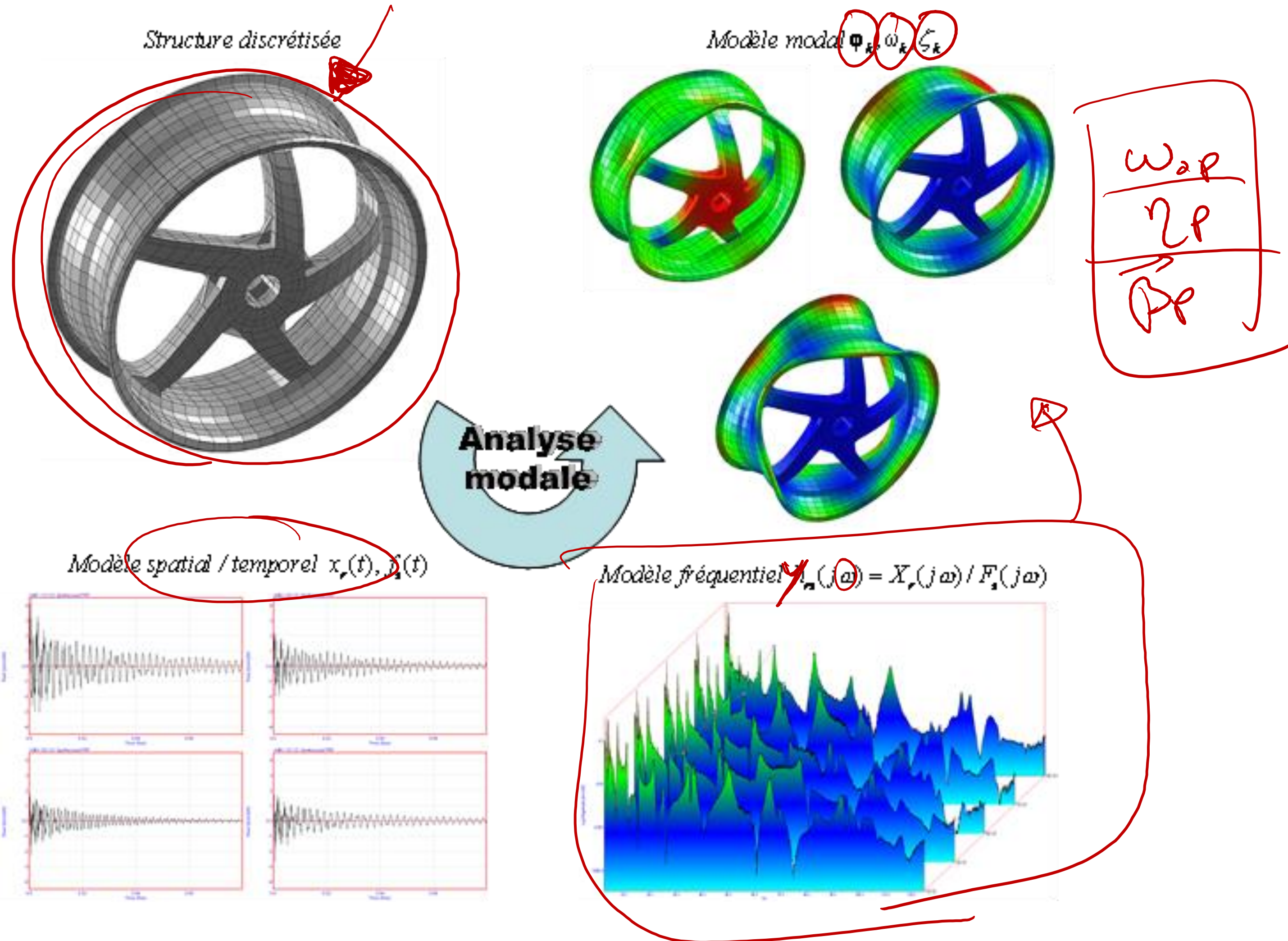
$$Y_{rs}(j\omega) = \frac{X_r(j\omega)}{F_s(j\omega)} = \sum_{p=1}^n \frac{\beta_r^p \beta_s^p}{m_p^0 (-\omega^2 + 2j\eta_p \omega_{0p} \omega + \omega_{0p}^2)}$$

Au voisinage du mode p .

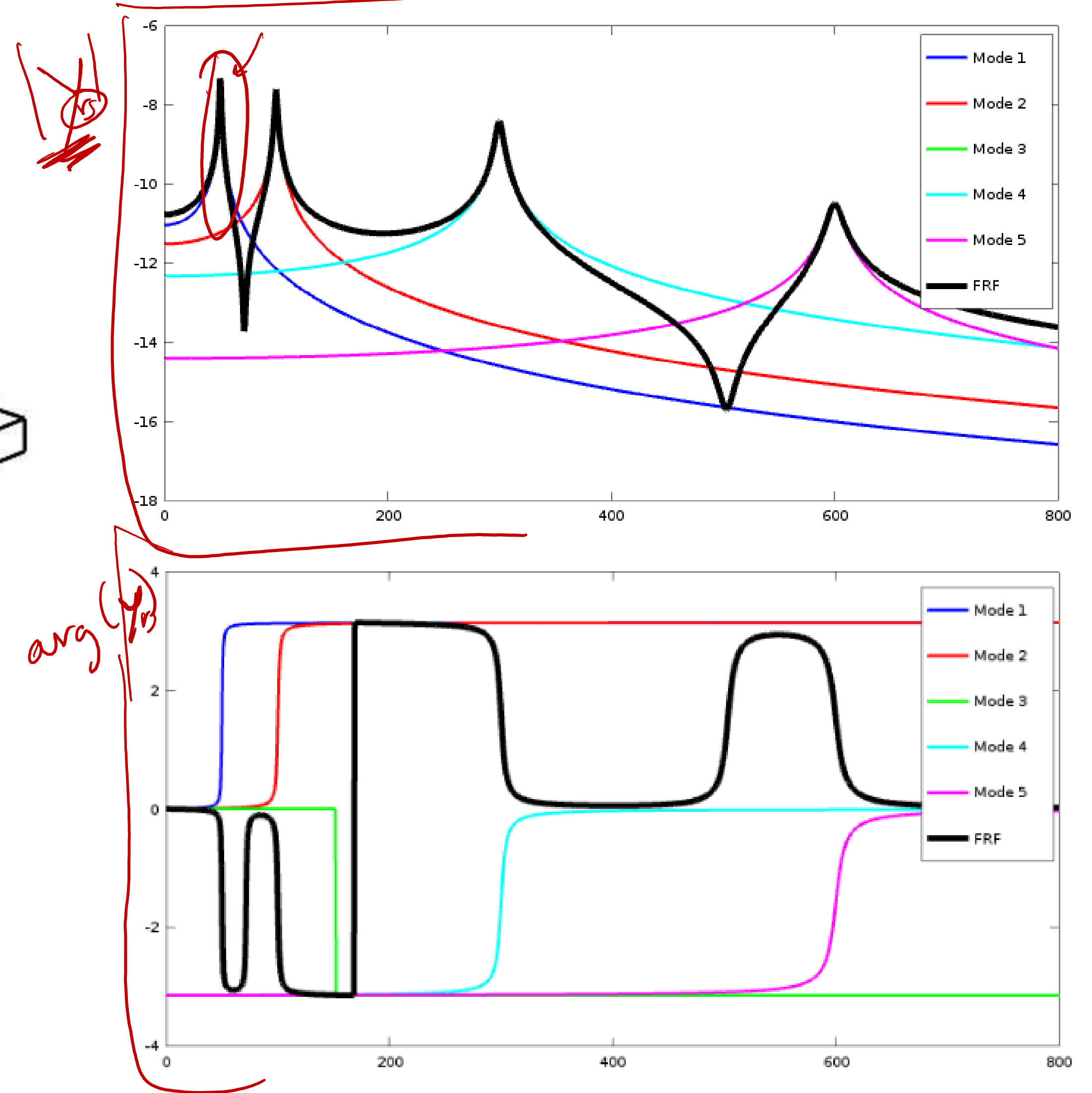
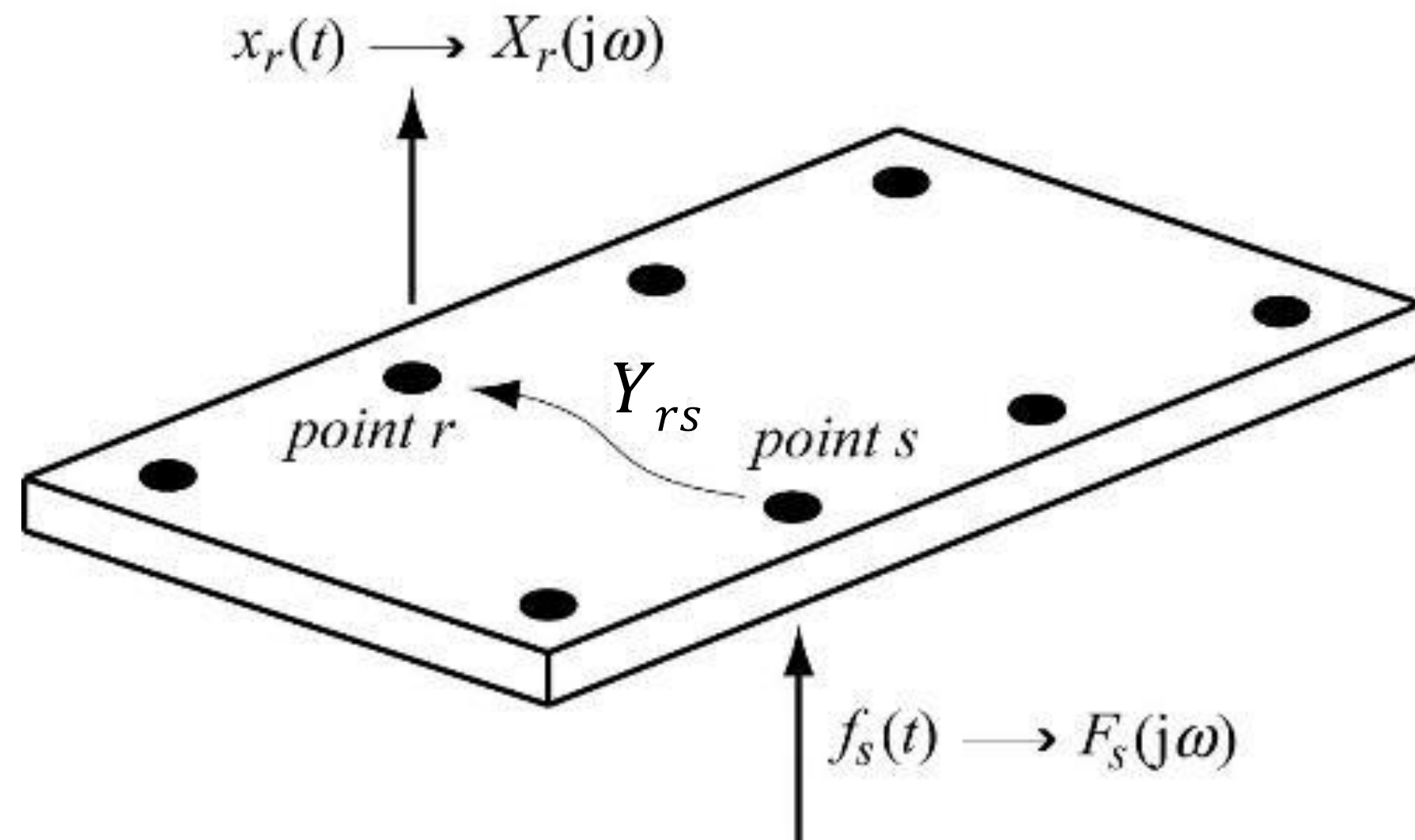
$$Y_{rs} = Y_{rs}^{(1)} + \dots + Y_{rs}^{(n)} \approx Y_{rs}^{(p)} \approx \frac{\beta_r^p \beta_s^p}{m_p^0 (\omega_{0p}^2 + 2j\eta_p \omega_{0p} \omega - \omega^2)}$$



EPFL Analyse Modale Expérimentale (TPC - BAG)



EPFL Analyse Modale Expérimentale



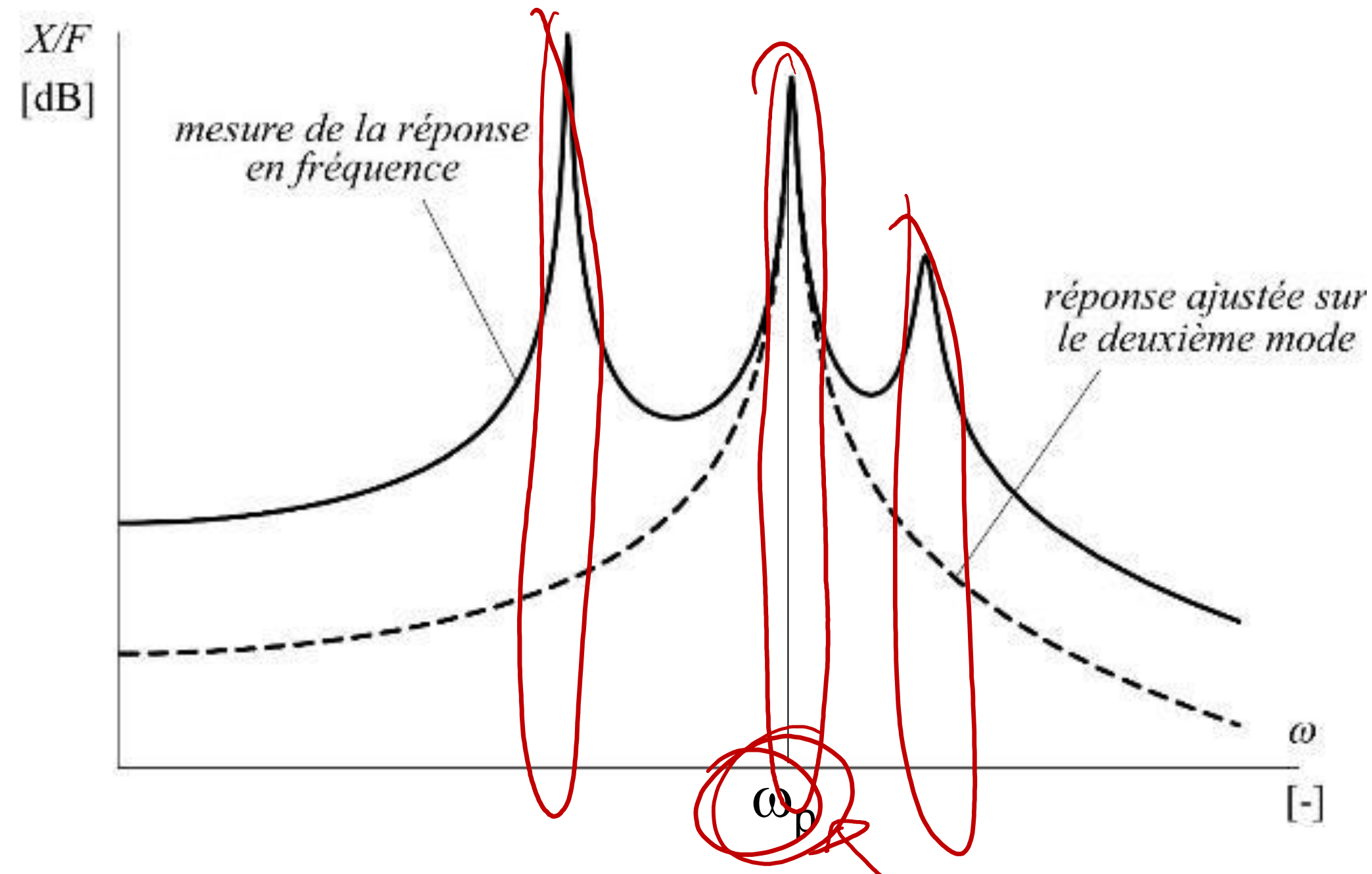
EPFL Analyse Modale – Fréquences Propres

Au voisinage du mode p :

$$Y_{rs} = Y_{rs}^I + \dots + Y_{rs}^n \cong Y_{rs}^p = \frac{\beta_r^p \beta_s^p}{m_p^0 (\omega_{0p}^2 + 2j\eta_p \omega_{0p} \omega - \omega^2)}$$

ω_p

Mesure des *pulsations propres*

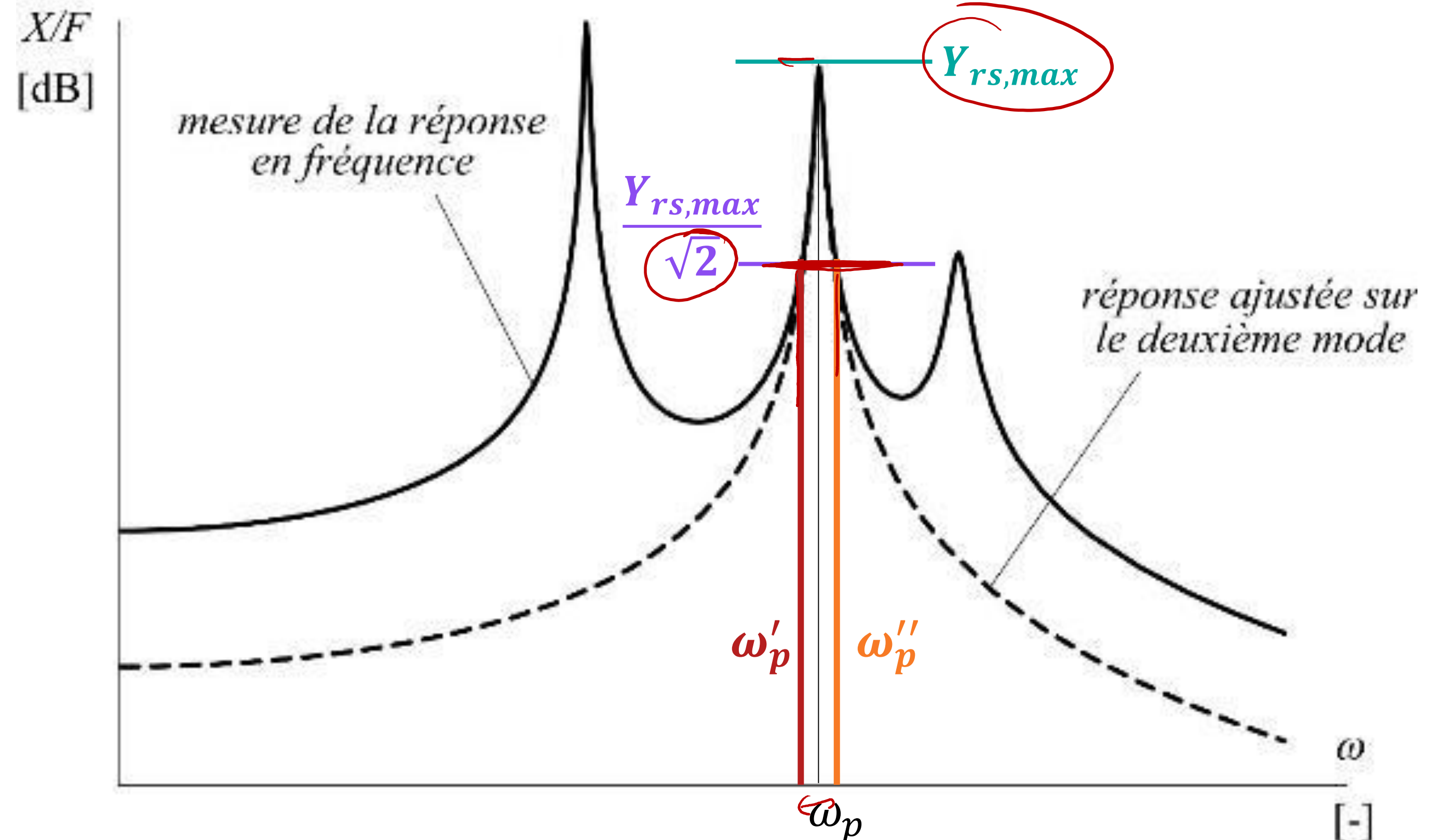


EPFL Analyse Modale – Amortissements Modaux

Au voisinage du mode p :

$$Y_{rs} = Y_{rs}^I + \dots + Y_{rs}^n \cong Y_{rs}^p = \frac{\beta_r^p \beta_s^p}{m_p^0 (\omega_{0p}^2 + 2j\eta_p \omega_{0p} \omega - \omega^2)}$$

$$\eta_p = \frac{\omega_p'' - \omega_p'}{\omega_p'' + \omega_p'}$$



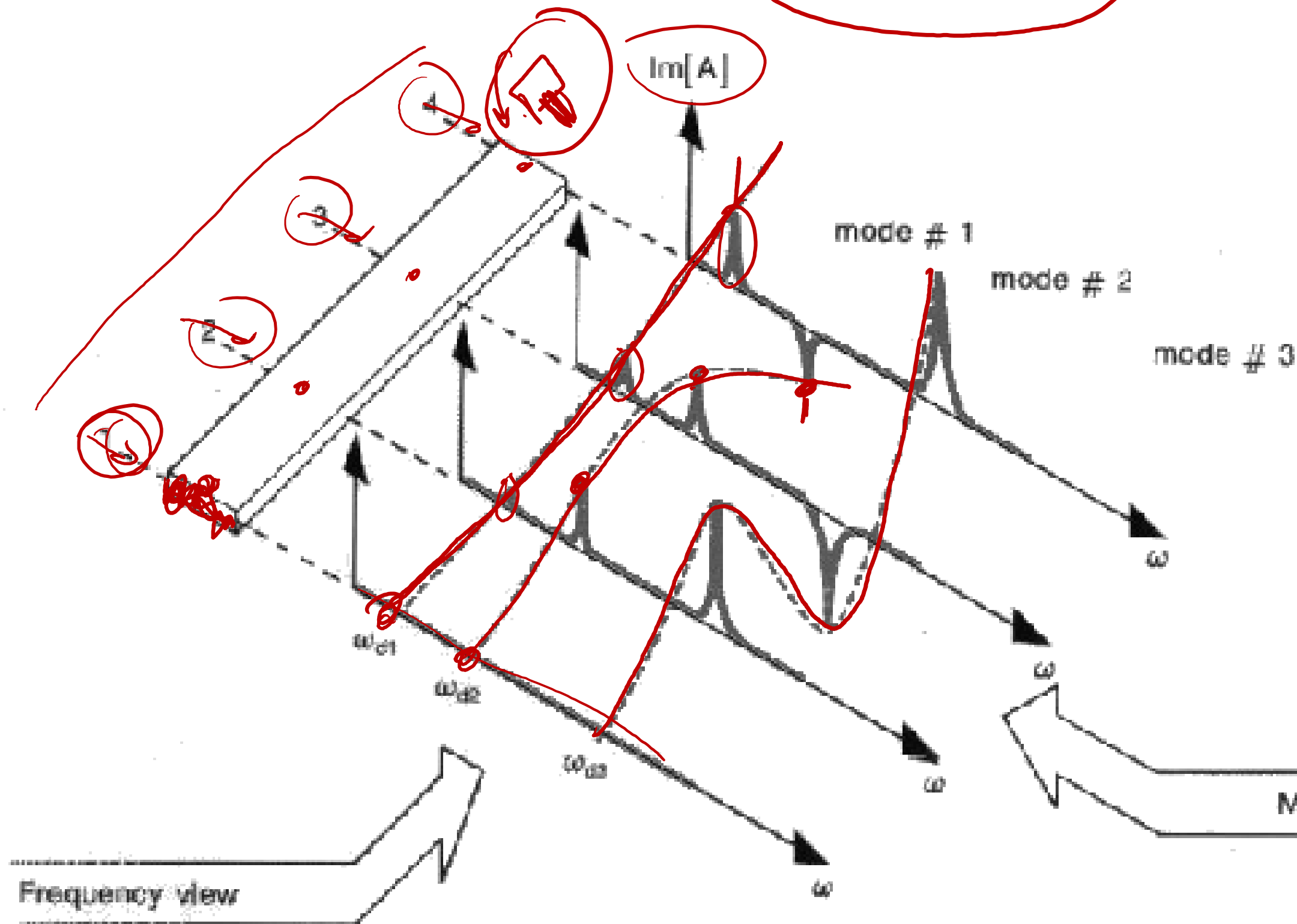
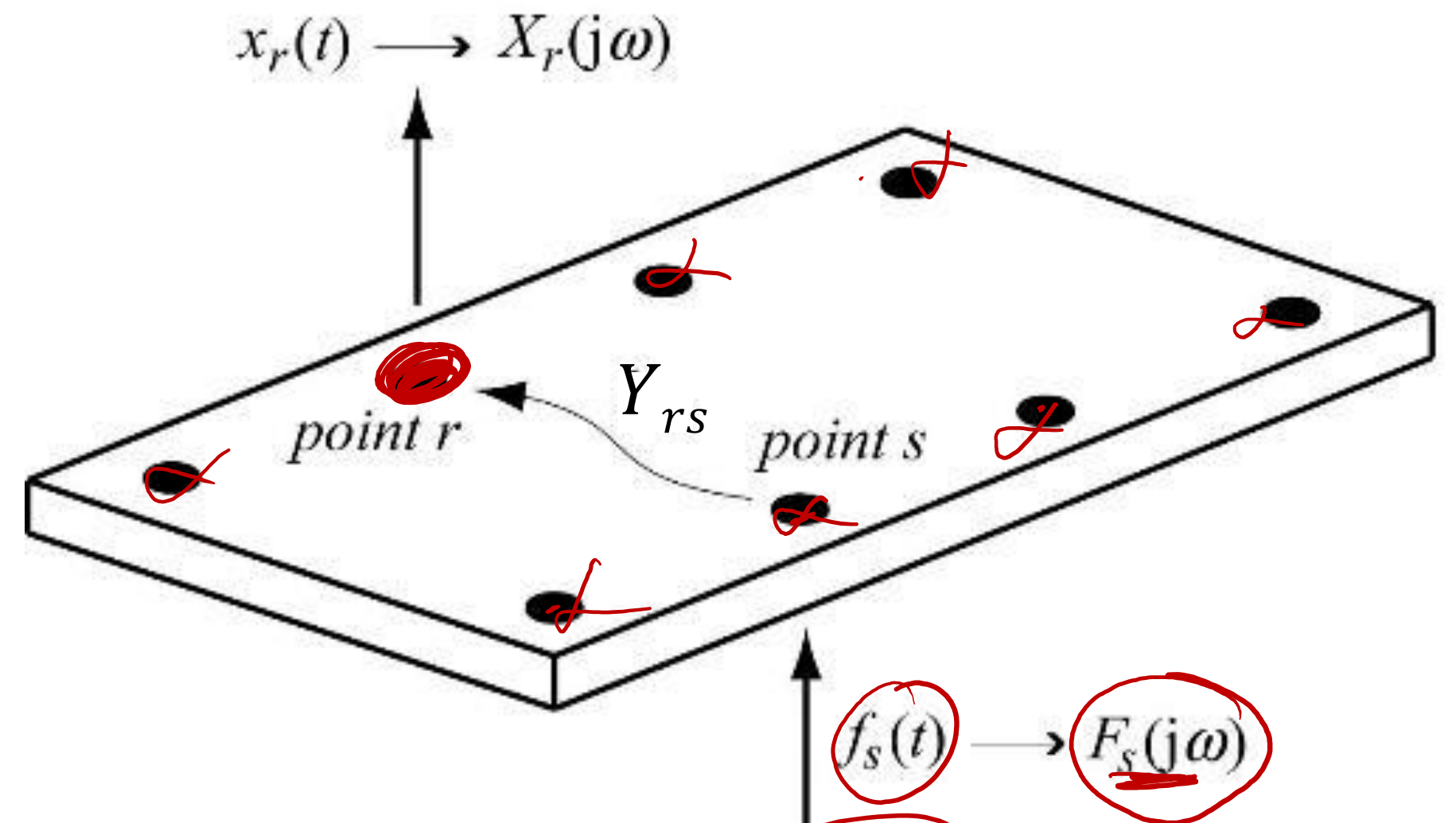
EPFL Analyse Modale – Vecteurs Propres

A la résonance du mode p .

$$Y_{rs}(\omega_p) \approx Y_{rs}^p(\omega_p) \approx \frac{\beta_r^p \beta_s^p}{2j\eta_p m_p^0 \omega_p^2}$$

$$\beta_s^p \propto Y_{rs}(\omega_p)$$

$$\beta_r^p \propto Y_{rs}(\omega_p)$$



$$\vec{\beta}_p = \begin{pmatrix} \beta_1^p \\ \beta_2^p \\ \vdots \\ \beta_n^p \end{pmatrix}$$